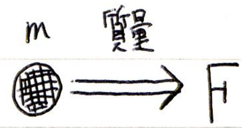
[力学の理解のために!]

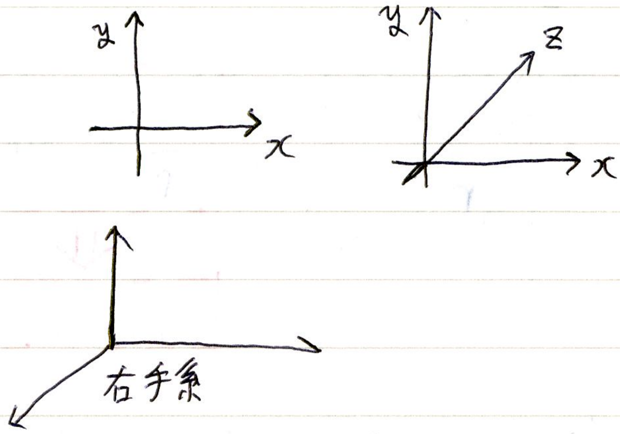
(物理)

力 ⇒ 空間ベクトル

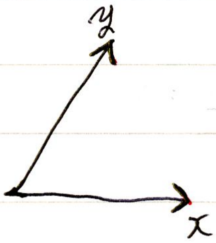


大きさと方向

座標軸をひとつ定める
普通は『直交座標』

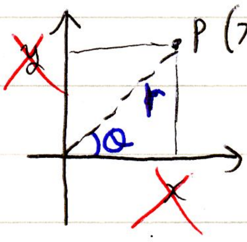


[斜交座標]



※方程式 equation
一次 renire
二次 Caderac

[極座標] poler-coordinate

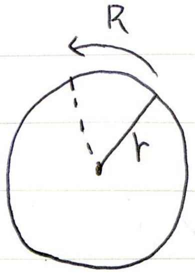


$P(x, y) \xrightarrow{\text{対応}} P(r, \theta)$ ⇒座標の資格あり

:直交座標 $P(1, 1)$
:極座標 $P(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

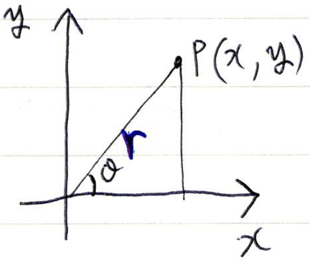
$$\boxed{-\pi \leqq \theta \leqq \pi}$$

[ラジアン]



$$\boxed{2\pi = 1\,\mathrm{rad}}$$

[変換式]



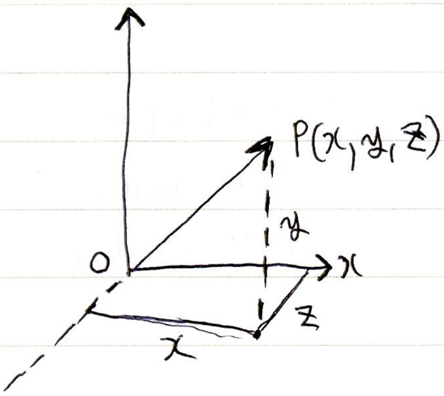
$$\boxed{\frac{y}{r} = \sin\theta}$$

$$\Downarrow$$

変換式

$$\boxed{y = r\sin\theta}$$

※以後、ことわりがなければ右手系の空間の直交座標を考える



$\mathbb{r} = \overrightarrow{OP}$ を位置ベクトルと言う。

$= \underbrace{(x, y, z)}_{3成分}$

[速度・加速度]

$\mathbb{r}$ = 時間 t により変化

$\Downarrow$

$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

各成分は t の関数

※ $x(t) = w\cos t$ 円運動の方程式
$y(t) = w\sin t$

速度 = 単位時間あたりの位置の変化
⇓
数学的には tによる微分のこと

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{dy}{dt} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \frac{dz}{dt} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Delta \mathbb{r} &= \mathbb{r}(t+\Delta t) - \mathbb{r}(t) \\ &= (\Delta x, \Delta y, \Delta z) \end{aligned}$$

◎ 速度ベクトルは $\mathbb{V}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

◎ 加速度ベクトルは 単位時間あたりの速度ベクトルの変化
⇓

$$\mathbb{a}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt}, \frac{d^2y}{dt}, \frac{d^2z}{dt}\right)$$

問 等速度円運動の速度及び加速度を求めよ

質量 × 加速度 = 力

慣性質量

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = F(x, y, z)$$

※ニュートンの運動法則

[達人]

ケプラー kepler
コペルニクス
ティコブラーエ
ガリレオ

すべて経験則

[質量]

慣性質量 (inuersial)

①

動力質量

動場が変化する

①をアインシュタインは同等だと考えた。そして相対論を作った。

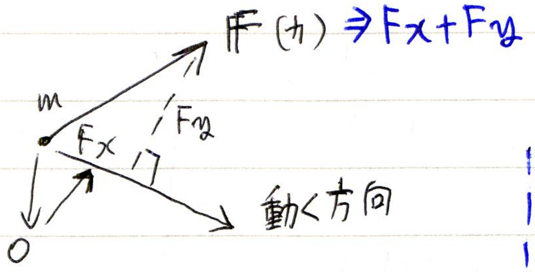
[運動量ベクトル]

$$P = m \cdot v \quad (質量 \times 速度ベクトル)$$

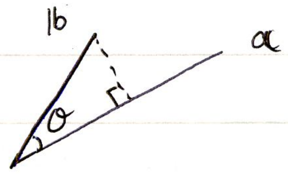
$$= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt^2} = \frac{dP}{dt} = F \quad (運動量ベクトルの時間変化)$$

◎ 仕事 work



$\boxed{\text{F と } \Delta\text{F の内積を、F のなした仕事という}}$



$\theta =$ 『aのなす角』

※ $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ の長さ

$= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$= \|\mathbf{a}\|$ と表す

$|\mathbf{a}|\cos\theta|\mathbf{b}|$ を、

a と b の内積と言う

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

⇓

これは、図形的定義である。

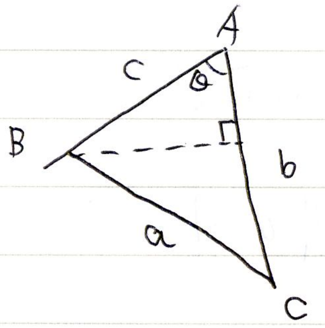
問 では、成分で内積を表すと、

$$\begin{cases} \mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

$$(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

を証明せよ!!

[余弦定理]

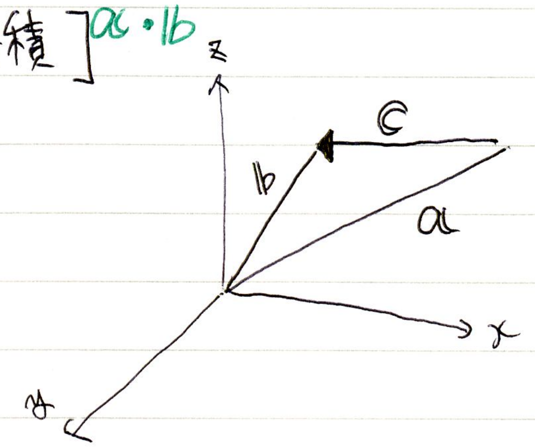


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

[宿題]

ピタゴラスのわかりやい証明を考案せよ

[内積] $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}$



$$\mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\mathbb{C} = (C_1, C_2, C_3)$$
$$= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

$$\|\mathbb{c}\|^2 = \|\mathbb{a}\|^2 + \|\mathbb{b}\|^2 - 2\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta$$

$$= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= \|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$$

[内積の性質]

① $(\mathbb{a}, \mathbb{b}) = (\mathbb{b}, \mathbb{a})$

② $\|\mathbb{a}\|^2 = (a_1, a_2) \geqq 0$

等号は $a_1 = a_2 = a_3$ の時成り立つ

③ $(\mathbb{a} + \mathbb{a}', \mathbb{b}) = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{a}', \mathbb{b})$

$(\mathbb{a}, \mathbb{b} + \mathbb{b}') = (\mathbb{a}, \mathbb{b}) + (\mathbb{a}, \mathbb{b}')$

$(\lambda\mathbb{a}, \mathbb{b}) = \lambda(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

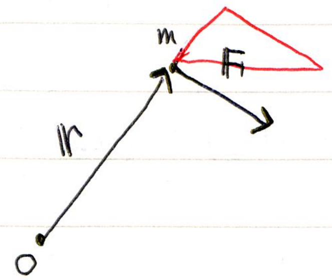
$(\mathbb{a}, \lambda\mathbb{b}) = \lambda(\mathbb{a}, \mathbb{b})$

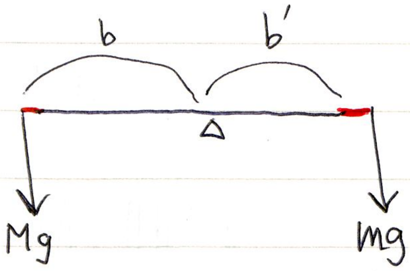
[宿題]

内積の図形的定義『$\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\|\cos\theta$』を用いて、③を証明せよ！

[外積] $\mathbb{a} \times \mathbb{b}$

モーメント
角運動量

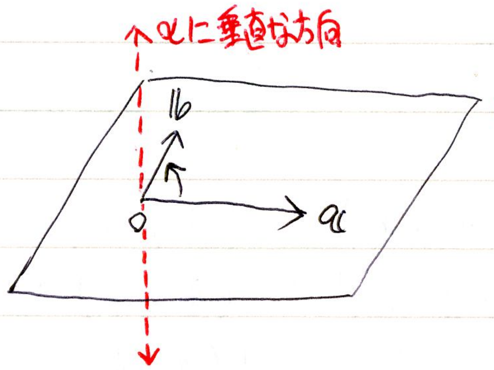




釣り合う為には?

$$\begin{cases} \mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{cases}$$

の外積の図形的定義は



方向	$\mathbb{a}$ から $\mathbb{b}$ への右ネジ
大きさ	$\|\mathbb{a}\|\|\mathbb{b}\| \sin\theta$

θ は $\mathbb{a} \cdot \mathbb{b}$ の成す角 $(0 \sim 180^\circ)$
$\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ の方向が同じ時は、$\theta = 0$ or π より $\vec{0}$

性質

- $\mathbb{a} \times \mathbb{b} = -\mathbb{b} \times \mathbb{a}$
- $\mathbb{a} \times \mathbb{a} = 0$
- $(\mathbb{a} + \mathbb{a}') \times \mathbb{b} = \mathbb{a} \times \mathbb{b} + \mathbb{a}' \times \mathbb{b}$ ※分配法則
- $(\lambda \mathbb{a}) \times \mathbb{b} = \lambda (\mathbb{a} \times \mathbb{b})$

(問) ※を図形的定義を用いて証明せよ

これが解ればば外積の成分表示は次の様になる。

$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \boxed{}$