水③-1

[指定教科書]　問題集があり

- ベクトル・行列　3週 ⇒ 線形代数学
- 1変数の微積分　のこり ⇒ 解析学

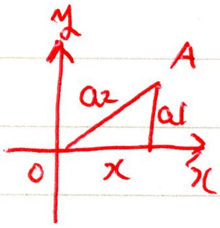
- 2変数の微積分　後期 ⇒ 幾何学

[本題]

~~本~~文章能力が大事 ⇒ 表現力

§ ベクトルと行列

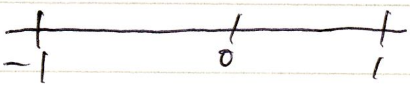
平面ベクトル
空間ベクトル
一般ベクトル



宿題：
ギリシャ文字すべて読み書き

◎数(すう)の体系

①実数



数直線

②自然数
natural number

$\mathbb{N}$ = $\left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & & \\ 一 & 二 & 三 & & \end{array} \right\}$

集合

◎ 演算が可能!

① $\mathbb{N}$ には加法が定義される

belong element

$n, m \in \mathbb{N}$ 属する，要素

⇓

すべての $\forall$

n, m に対し、$n+m \in \mathbb{N}$ が定められている

存在する $\exists$

⇓

$\boxed{{}^{\forall}n \in \mathbb{N} \quad \text{のように書く}}$

構築の過程を調べる

法則 ${}^{\forall}n, m, l \in \mathbb{N}$ の時、

$(n+m)+l = n+(m+l)$ ⇒ 結合律

$n+m = m+n$ ⇒ 交換律

② $\mathbb{N}$ には乗法が定義される

法則 ${}^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$ に対し、n と m の積と呼ばれる $n, m \in$ が存在する

$(n \cdot m)l = n(m \cdot l)$ ⇒ 結合律

⑩ 方程式 $x+m=n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ は、$\mathbb{N}$の中には常に解が存在するか？

ⓐ.  の位置では存在しないことも

⇓

ここで、すべての数に対応させる！

{ 負の自然数＝整数を導入する } ←「0」の導入

岩波新書
「零(ゼロ)の発見」
吉田洋一
⇓
位取りが可能

⇓

整数の解を持つ

☆零の役割は？

$n+0=0+n=n$ を満たす数のこと

乗法も整数に対して定義される

⑦ 整数全体を記号 $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{I}$) と記す
Zhalen Integral

◎ $\mathbb{Z}$の中では方程式『$xn = m$』　($n, m \in \mathbb{Z}$)

- $n = 0$, $m = 0$ の時に解を持つが、不定である
- $m \neq 0$, $n = 0$ の時に、解はない
- $n \neq 0$ のときは、倍数(割り切れる)である m にのみ解はある

> 6は2で割り切れる
>
> $6 = 2 \cdot 3$
>
> $\Downarrow$
>
> $2 \mid 6$ と書く

- $n \mid m$ でないとき ($n \nmid m$) 分数の導入をすれば、常に「$xn = m$」は解 $\frac{m}{n}$ を持つ。

$$\frac{m}{n} = \frac{l}{p} \Leftrightarrow mp = nl \quad (n, m \neq 0)$$

Rational number は 実数

> 分数全体を有利数という
>
> $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\right\}$ $n, m \in \mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$

比，商 quotient

$\Downarrow$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} (\subset \mathbb{R})$ 実数

$n = \frac{m}{l}$

$\mathbb{Q}$には $\left[\begin{array}{ll} \text{加法} & + \\ \text{減法} & - \\ \text{乗法} & \times \\ \text{除法} & \div \end{array}\right]$ と四則三法が定義される

演算算法

$\mathbb{Q}$または$\mathbb{R}$においては、四則算法があり、それらは次の法則を満たす（a, b, c で $\mathbb{Q}$または$\mathbb{R}$の数を表すものとする）

① $(a+b)+c = a+(b+c)$

② $a+b = b+a$

③ $a+0 = 0+a = a$

④ $^\forall a$に対し $a+x = x+a$ となるxが存在する

⑤ $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

交換律 ⑥ $a\cdot b = b\cdot a$

★⑦ $1\cdot a = a\cdot 1 = a$（単位元が存在する）

⑧ $^\forall a \neq 0$ に対し、$ax = xa = 1$ となるxが存在する

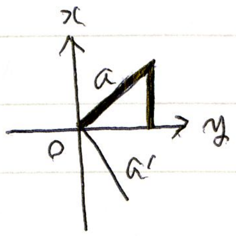
分配 ⑨ $a(b+c) = ab + ac$ …公理であり証明しない

ex $(-a)(-b) = ab$ は⑩でない！⇒証明できる！

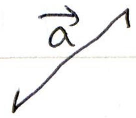
$-(-a) = a$

◎ベクトルの定義及び演算

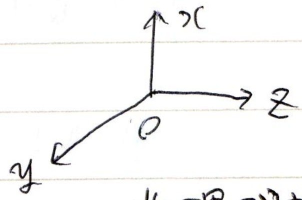
平面ベクトルは



又は



平行移動して重なる物は同じ!



物理では力は
矢印で表されるベクトル量
(どこに作用するのか)

$\mathbb{a} = (a_1, a_2)$ 又は $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

成分・コンポーネント

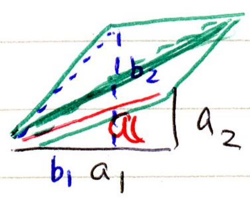
縦ベクトル　　横ベクトル

◎即ち 2つの数の並びがベクトル (2次元とか平面という)

◎ベクトルの演算

①加法　$\mathbb{a} = (a_1, a_2)$ に対し、
$\mathbb{b} = (b_1, b_2)$

$\mathbb{a} + \mathbb{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ で表す



$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ に対し、

① $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

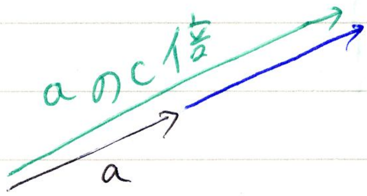
② $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

③ $\mathbf{a}+0=0+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

④ $\mathbf{a}$ に対し、$x+\mathbf{a}=\mathbf{a}+x=\mathbf{0}$ となる x が ただ1つ存在

($x=-\mathbf{a}$ と表す) → 逆元

◎ベクトルのスカラー倍



$\mathbf{a}=(a_1, a_2)$ に対し、

$c\mathbf{a}=(ca_1, ca_2)$ となる

◎ d に対し

⑤ $cd\mathbf{a}=c(d\mathbf{a})$

⑥ $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

⑦ $c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

⑧ $(c+d)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+d\mathbf{a}$

⑨以降は①～⑧で証明できる公理

定理 1

①〜⑧ が成立していると仮定する

$\boxed{a + 0 = 0 + a = a}$ となるベクトルはただ1つ!

ゼロベクトルの一意性

『存在と一意性』

examinance

このことが存在すれば一意的

③で保障するのは存在のみ

証明) 0以外に0と同じ性質を持つ0'があったにせよ、

即ち、『$0 + 0' = 0' + 0 = 0$』 (for $\forall a$)

が正しいとする。

このとき、$0 = 0'$ を示せばよい

$a = 0 + 0' = 0'$ において a を 0 とすればよい。

証明終わり

定理2　大事

①〜⑧を満たすとする時、

aに対し、$a+x=x+a=0$となるxは、存在するのなら唯1つである。

証明）　x以外にx'（xと同じ性質）が存在するとする。

このとき、$x=x'$を示せばよい　③

$$x=\underbrace{x+\underline{\underline{0}}=x+\underline{\underline{(a+x')}}}_{③}=(x+a)+x'$$

$$\|$$

$$0$$

$$\boxed{=x'}$$

☆定理2があるおかげで、『$-a$』と記すことが許される

$\boxed{-(-a)=a}$ も一意性

$$\left[\begin{array}{l} -a+\underset{\substack{x\\-x}}{\underline{\underline{a}}}=\underset{\substack{x\\-x}}{\underline{\underline{a}}}+(-a)=0 \end{array}\right]$$